ID=512744160

YU ISSN 0040-2176 UDC: 62(062.2) (497.1)

TEHNIKA®

GODINA LXIV 2009.

ČASOPIS SAVEZA INŽENJERA I TEHNIČARA SRBIJE

4

Numerički aspekt rešenja diferencijalnih jednačina strujanja suspenzije između dva saosna cilindra

Dr *DUŠKO SALEMOVIĆ*, Viša tehnička škola, Zrenjanin,
dr *BOŠKO JOVANOVIĆ*, Matematički fakultet,
Beograd, dr *ALEKSANDAR DEDIĆ*, Šumarski fakultet, Beograd

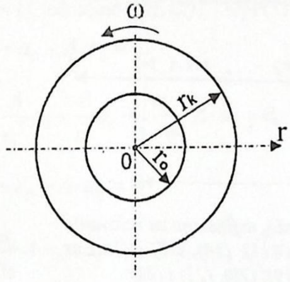
Originalni naučni rad
UDC:621.8.032-222

U radu će biti prezentovan numerički aspekt rešenja sistema običnih linearnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima, koje opisuju strujanje suspenzije između dva saosna cilindra, od kojih unutrašnji miruje, a spoljašnji rotira konstantnom ugaonom brzinom. Rešenje ovih jednačina pronađeno je metodom običnih konačnih razlika, a zatim su kroz odgovarajuće skupove tačaka (čvorove) provučeni interpolacioni grafici.

***Ključne reči:** strujanje supenzije, numeričko rešenje, identifikacija rešenja*

1. POSTAVKA MATEMATIČKOG MODELA STRUJANJA SUSPENZIJE IZMEĐU DVA SAOSNA CILINDRA

Na slici 1. prikazana su dva saosna cilindra, od kojih unutrašnji miruje, a spoljašnji rotira konstantnom ugaonom brzinom (ω), dok se između njih kreće suspenzija određenih fizičkih svojstava. Poluprečnici ovih cilindara su respektivno, unutrašnjeg (r_o), a spoljašnjeg (r_k).



Slika 1 - Uprošćena funkcionalna šema kretanja suspenzije između dva saosna cilindra

Matematički model strujanja suspenzije, opisuje polje brzine kretanja suspenzije (v) i polje brzine mikrorotacije suspenzije (w), u zavisnosti od potega (r) i definisan je sistemom od dve obične linearne diferencijne jednačine drugog reda sa promenljivim koeficijentima, koje poseduju sledeću formu [1].

$$\begin{cases} r^2\dfrac{d^2v}{dr^2}+r\dfrac{dv}{dr}-v-\dfrac{\alpha_1}{1+\alpha_1}r^2\dfrac{dw}{dr}=0, & (1) \\[2ex] \alpha_2 r\dfrac{dv}{dr}+\alpha_2 v+r\dfrac{d^2w}{dr^2}+\dfrac{dw}{dr}-2\alpha_2 rw=0 & (2) \end{cases}$$

gde je $\alpha_1 = const > 0$ i $\alpha_2 = const > 0$.

Granični uslovi za prethodni sistem jednačina glase:

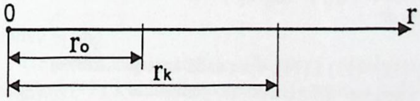
$$v(r)\big|_{r=r_0} = v(r_0) = v_0 = 0, \quad (3)$$

$$v(r)\big|_{r=r_k} = v(r_k) = v_k = r_k\omega, \quad (4)$$

$$w(r)\big|_{r=r_0} = w(r_0) = w_0 = 0, \quad (5)$$

$$w(r)\big|_{r=r_k} = w(r_k) = w_k = 0. \quad (6)$$

Granična kontura na kojoj sistem jednačina (1) i (2) uz granične uslove (3), (4), (5) i (6) važi, predstavlja duž na potegu (r), u rasponu od unutrašnjeg (r_o), do spoljašnjeg (r_k), poluprečnika nepokretnog i pokretnog cilindra, što je prikazano na slici 2.



Slika 2 - Granična kontura za sistem jednačina (1) i (2) uz granične uslove (3), (4), (5) i (6)

Adresa autora: dr Aleksandar Dedić, Šumarski fakultet, Kneza Višeslava 1, 11030 Beograd

Rad primljen: 19. 03. 2009.

2. POSTUPAK NUMERIČKOG REŠAVANJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KOJE OPISUJU STRUJANJE SUSPENZIJE IZMEĐU DVA SAOSNA VALJKA

Iako je sistem diferencijalnih jednačina (1) i (2), uz granične uslove (3), (4), (5) i (6), analitički rešiv [2], ovde će biti prezentovano numeričko rešenje ovog problema.

Pre nego što se pristupi rešavanju ovog problema, izvršiće se snižavanje reda sistema jednačina (1) i (2) sa drugog na prvi red, poznatom "metodom Košija", tako što će se definisati sledeće zavisno promenljive [3]:

$$a(r) = v(r), \tag{7}$$

$$b(r) = \frac{dv(r)}{dr}, \tag{8}$$

$$c(r) = w(r), \tag{9}$$

$$d(r) = \frac{dw(r)}{dr}. \tag{10}$$

Diferencirajući jednačinu (7) po nezavisno promenljivoj (r) i uzimajući u obzir jednačinu (8), slediće:

$$\frac{da(r)}{dr} = b(r).$$

Analogno prethodnom, diferencirajući jednačinu (9), takođe po nezavisno promenljivoj (r) i uzimajući u obzir jednačinu (10), slediće:

$$\frac{dc(r)}{dr} = d(r). \tag{12}$$

Uvažavajući jednačine (7), (8), (9) i (10), jednačine (1) i (2) će poprimiti sledeću formu:

$$r^2\frac{db(r)}{dr} + rb(r) - a(r) - \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}r^2 d(r) = 0, \tag{13}$$

$$\alpha_2 rb(r) + \alpha_2 a(r) + r\frac{dd(r)}{dr} + d(r) - 2\alpha_2 rc(r) = 0. \tag{14}$$

Jednačine (11), (12), (13) i (14), čine sada sistem od četiri obične linearne diferencijalne jednačine prvog reda sa promenljivim koeficijentima, koje sakupljene na jednom mestu glase:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{da(r)}{dr} = b(r), && (15) \\ &\frac{db(r)}{dr} = \frac{1}{r^2}a(r) - \frac{1}{r}b(r) + \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}d(r), && (16) \\ &\frac{dc(r)}{dr} = d(r), && (17) \end{aligned} \right.$$

$$\frac{dd(r)}{dr} = \frac{\alpha_2}{r}a(r) - \alpha_2 b(r) + 2\alpha_2 c(r) - \frac{1}{r}d(r). \tag{18}$$

Granični uslovi (3), (4), (5) i (6), shodno promenama u strukturi jednačina (1) i (2), postaju:

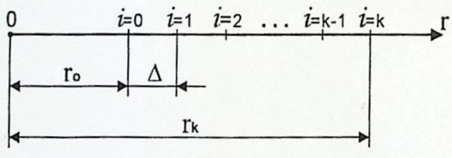
$$a(r)|_{r=r_0} = a(r_0) = a_0 = 0, \tag{19}$$

$$a(r)|_{r=r_k} = a(r_k) = a_k = r_k\omega, \tag{20}$$

$$c(r)|_{r=r_0} = c(r_0) = c_0 = 0, \tag{21}$$

$$c(r)|_{r=r_k} = c(r_k) = c_k = 0. \tag{22}$$

Kompletan algoritam numeričkog rešavanja sistema jednačina (15), (16), (17) i (18), uz granične uslove (19), (20), (21) i (22) i graničnu konturu sa slike 2, biće započet definisanjem "mreže", tj. Deobom granične konture na sekvence, shodno usvojenom koraku integracije (Δ). Granična kontura sa slike 2, definisana kao "integraciona mreža") prikazana je na slici 3.



Slika 3 - Integraciona mreža, definisana za rešavanje sistema jednačina (15), (16), (17) i (18), uz granične uslove (19), (20), (21) i (22)

Veličina koraka integracije iznosiće:

$$\Delta = \frac{r_k - r_0}{n} \tag{23}$$

gde je veličina (n) jednaka broju koraka duž granične konture.

Izvodi veličina $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ i $d(r)$, zamenjeni običnim konačnim razlikama, definisani su na sledeći način [4]:

$$\frac{da}{dr} \approx \frac{a_i - a_{i-1}}{\Delta}, \tag{24}$$

$$\frac{db}{dr} \approx \frac{b_i - b_{i-1}}{\Delta}, \tag{25}$$

$$\frac{dc}{dr} \approx \frac{c_i - c_{i-1}}{\Delta}, \tag{26}$$

$$\frac{dd}{dr} \approx \frac{d_i - d_{i-1}}{\Delta}. \tag{27}$$

Zamenom izraza (24), (25), (26) i (27) u jednačine (15), (16), (17) i (18), slediće:

$$a_i - a_{i-1} - \Delta \cdot b_{i-1} = 0, \tag{28}$$

$$b_i - b_{i-1} - \frac{\Delta}{r_{i-1}^2} a_{i-1} + \frac{\Delta}{r_{i-1}} b_{i-1} - \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \Delta \cdot d_{i-1} = 0, \tag{29}$$

$$c_i - c_{i-1} - \Delta \cdot d_{i-1} = 0, \tag{30}$$

$$d_i - d_{i-1} + \frac{\alpha_2}{r_{i-1}} \Delta \cdot a_{i-1} + \alpha_2 \Delta \cdot b_{i-1} - 2\alpha_2 \Delta \cdot c_{i-1} + \frac{\Delta}{r_{i-1}} d_{i-1} = 0. \tag{31}$$

Gornji numerički algoritam za izračunavanje veličina (*a*, *b*, *c* i *d*), važi za sve tačke na "mreži", u rasponu od:

$$i = (1 \div k). \tag{32}$$

Za ($i = 1$), jednačine (28), (29), (30) i (31) glase:

$$a_1 - a_0 - \Delta \cdot b_0 = 0, \tag{33}$$

$$b_1 - b_0 - \frac{\Delta}{r_0^2} a_0 + \frac{\Delta}{r_0} b_0 - \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \Delta \cdot d_0 = 0, \tag{34}$$

$$c_1 - c_0 - \Delta \cdot d_0 = 0, \tag{35}$$

$$d_1 - d_0 + \frac{\alpha_2}{r_0} \Delta \cdot a_0 + \alpha_2 \Delta \cdot b_0 - 2\alpha_2 \Delta \cdot c_0 + \frac{\Delta}{r_0} d_0 = 0. \tag{36}$$

Za ($i = 2$), jednačine (28), (29), (30) i (31) glase:

$$a_2 - a_1 - \Delta \cdot b_1 = 0, \tag{37}$$

$$b_2 - b_1 - \frac{\Delta}{r_1^2} a_1 + \frac{\Delta}{r_1} b_1 - \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \Delta \cdot d_1 = 0, \tag{38}$$

$$c_2 - c_1 - \Delta \cdot d_1 = 0, \tag{39}$$

$$d_2 - d_1 + \frac{\alpha_2}{r_1} \Delta \cdot a_1 + \alpha_2 \Delta \cdot b_1 - 2\alpha_2 \Delta \cdot c_1 + \frac{\Delta}{r_1} d_1 = 0. \tag{40}$$

Gornji algoritam treba sprovesti za ($i = 3$), ($i = 4$), ..., ($i = k-1$), pa sve do ($i = k$).

Konačno za ($i = k$), jednačine (28), (29), (30) i (31) glase:

$$a_k - a_{k-1} - \Delta \cdot b_{k-1} = 0, \tag{41}$$

$$b_k - b_{k-1} - \frac{\Delta}{r_{k-1}^2} a_{k-1} + \frac{\Delta}{r_{k-1}} b_{k-1} - \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \Delta \cdot d_{k-1} = 0, \tag{42}$$

$$c_k - c_{k-1} - \Delta \cdot d_{k-1} = 0, \tag{43}$$

$$\begin{gathered} d_k - d_{k-1} + \frac{\alpha_2}{r_{k-1}} \Delta \bullet a_{k-1} + \alpha_2 \Delta \bullet b_{k-1} - \\ - 2\alpha_2 \Delta \bullet c_{k-1} + \frac{\Delta}{r_{k-1}} d_{k-1} = 0. \end{gathered} \tag{44}$$

Nepoznate veličine u gornjem sistemu linearnih algebarskih jednačina su:

$$\begin{array}{ccccll} & b_0, & & d_0, & za & r = r_0 \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1, & za & r = r_1 \\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2, & za & r = r_2 \\ & & \dots & & & \\ a_{k-1}, & b_{k-1}, & c_{k-1}, & d_{k-1}, & za & r = r_{k-1} \\ & b_k, & & d_k, & za & r = r_k \end{array}$$

Veličine $(a_0, c_0, a_k \text{ i } c_k)$ su zadate graničnim uslovima (19) , (20), (21) i (22), dok vrednosti potega (r) u odgovarajućim tačkama na "integracionoj mreži" iznose:

$$r_1 = r_0 + \Delta, \tag{45}$$

$$r_2 = r_0 + 2 \cdot \Delta, \tag{46}$$

$$\dots$$

$$r_{k-1} = r_0 + (k-1) \cdot \Delta, \tag{47}$$

$$r_k = r_0 + k \cdot \Delta. \tag{48}$$

Sistem linearnih algebarskih jednačina (33) ÷ (44), napisan u matričnoj formi poprimiće sledeći izgled [4]:

$$A \; \underline{x} = \underline{y} \tag{49}$$

U prethodnoj matričnoj linearnoj algebarskoj jednačini (49), kvadratna matrica (A) i matrice kolone ($\underline{x}$) i ($\underline{y}$), imaju oblik prikazan u tabeli 1.

Tabela 1 - Razvijeni oblik matrične linearne algebarske jednačine (49)

$$
A=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
A^0_{4x2} & I_{4x4} & O_{4x4} & \dots & O_{4x4} & O_{4x4} & O_{4x2} \\ \hline
O_{4x2} & A^1_{4x4} & I_{4x4} & .. & O_{4x4} & O_{4x4} & O_{4x2} \\ \hline
O_{4x2} & O_{4x4} & A^2_{4x4} & .. & O_{4x4} & O_{4x4} & O_{4x2} \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
O_{4x2} & O_{4x4} & O_{4x4} & \dots & A^{k-2}_{4x4} & I_{4x4} & O_{4x2} \\ \hline
O_{4x2} & O_{4x4} & O_{4x4} & \dots & O_{4x4} & A^{k-1}_{4x4} & I_{4x2}
\end{array}\right];\quad
\underline{x}=\left[\begin{array}{c}
b_o \\ d_o \\ \hline a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ \hline a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ \hline \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \hline a_{k-2} \\ b_{k-2} \\ c_{k-2} \\ d_{k-2} \\ \hline a_{k-1} \\ b_{k-1} \\ c_{k-1} \\ d_{k-1} \\ \hline b_k \\ d_k
\end{array}\right];\quad
\underline{y}=\left[\begin{array}{c}
e \\ f \\ \hline g \\ h \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ k \\ 0 \\ \hline l \\ 0
\end{array}\right];\quad (50)
$$

Pojedine "submatrice"i ostale nepoznate veličine u gornjim matricama su:

$$
A^O_{4X2}=\begin{bmatrix} -\Delta & 0 \\ \left(\frac{\Delta}{r_0}-1\right) & -\frac{\alpha_1\Delta}{1+\alpha_1} \\ 0 & -\Delta \\ \alpha_2\Delta & \left(\frac{\Delta}{r_0}-1\right) \end{bmatrix};\;
A^1_{4x4}=\begin{bmatrix} -1 & -\Delta & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta}{r_1^2} & \left(\frac{\Delta}{r_1}-1\right) & 0 & -\frac{\alpha_1\Delta}{1+\alpha_1} \\ 0 & 0 & -1 & -\Delta \\ \frac{\alpha_2\Delta}{r_1} & \alpha_2\Delta & -2\alpha_2\Delta & \left(\frac{\Delta}{r_1}-1\right) \end{bmatrix};
$$

$$
A^2_{4x4}=\dots;\; A^{k-2}_{4x4}=\dots;\; A^{k-1}_{4x4}=\begin{bmatrix} -1 & -\Delta & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta}{r_{k-1}^2} & \left(\frac{\Delta}{r_{k-1}}-1\right) & 0 & -\frac{\alpha_1\Delta}{1+\alpha_1} \\ 0 & 0 & -1 & -\Delta \\ \frac{\alpha_2\Delta}{r_{k-1}} & \alpha_2\Delta & -2\alpha_2\Delta & \left(\frac{\Delta}{r_{k-1}}-1\right) \end{bmatrix} \qquad (51)
$$

$$
I_{4x2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\; I_{4x4}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (52)
$$

$$
O_{4x2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\; O_{4x4}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (53)
$$

$$e=a_0, \qquad (54)$$

$$f=\frac{\Delta}{r_0^2}a_0, \qquad (55)$$

$$g=c_0, \qquad (56)$$

$$h=-\frac{\alpha_2\Delta}{r_0}a_0+2\alpha_2\Delta c_0, \qquad (57)$$

$$k=-a_k, \qquad (58)$$

$$l=-c_k. \qquad (59)$$

Treba napomenuti da dimenzije matrica A, ($\underline{x}$) i ($\underline{y}$), zavise od broja koraka integracije. Svaki korak više, uvećava dimenzije matrice (A) za (4) po vrsti i (4) po koloni, dok se dimenzije matrica ($\underline{x}$) i ($\underline{y}$) uvećavaju za (4) po vrsti.

Nepoznata matrica kolona ($\underline{x}$) može se dobiti rešavanjem matrične linearne algebarske jednačine (49) na sledeći način [4]:

$$\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{y}. \tag{60}$$

Osnovni problem prilikom rešavanja gornje matrične jednačine je kako pronaći inverznu matricu (A^{-1}), kvadratne matrice (A) i zatim je pomnožiti matricom kolonom ($\underline{y}$).

Što je broj koraka numeričke integracije veći, demenzije matrica (A) i ($\underline{y}$) su veće pa je samim tim i problem složeniji. Tačnost numeričkog rešenja pak raste sa većim brojem koraka, pa je sa te strane posmatrano poželjnije da matrice (A) i ($\underline{y}$), budu što većih dimenzija. Zahtevi u pogledu tačnosti rešenja su protivurečni i ustvari su limitirani mogućnostima odgovarajućeg hardvera i softvera digitalnog računara koji treba da izračuna vrednosti matrice kolone ($\underline{x}$).

Izračunate vrednosti matrice kolone ($\underline{x}$), zajedno sa graničnim uslovima (19), (20), (21), (22), treba srediti tabelarno na način prikazan u tabeli 2.

Tabela 2 - Vrednosti matrice kolone ($\underline{x}$), zajedno sa graničnim uslovima

r	$a = v(r)$	$b = \frac{dv(r)}{dr}$	$c = w(r)$	$d = \frac{dw(r)}{dr}$	
r_0	$a_0 = 0$	b_0	$c_0 = 0$	d_0	
$r_1 = r_0 + \Delta$	a_1	b_1	c_1	d_1	
$r_2 = r_0 + 2\Delta$	a_2	b_2	c_2	d_2	(61)
...	...	...	...	...	
$r_{k-2} = r_0 + (k-2)\Delta$	a_{k-2}	b_{k-2}	c_{k-2}	d_{k-2}	
$r_{k-1} = r_0 + (k-1)\Delta$	a_{k-1}	b_{k-1}	c_{k-1}	d_{k-1}	
$r_k = r_0 + k\Delta$	$a_k = r_k\omega$	b_k	$c_k = 0$	d_k	

Na kraju potrebno je još formirati interpolacione zavisnosti za veličine $v(r)$, $dv(r)/dr$, $w(r)$ i $dw(r)/dr$ u funkciji od potega (r), i nacrtati njihove grafike. Ovde će biti prezentovani rezultati prethodne analize u slučaju da je:

$$a_1 = 10, \tag{62}$$

$$a_2 = 10, \tag{63}$$

$$\omega = 100, \tag{64}$$

$$r_0 = 0{,}004, \tag{65}$$

$$r_k = r_{10} = 0{,}0048, \tag{66}$$

$$n = 10(k = n = 10), \tag{67}$$

$$\Delta = \frac{r_k - r_0}{n} = \frac{r_{10} - r_0}{n} = \frac{0{,}0048 - 0{,}004}{10} = 0{,}00008, \tag{68}$$

$$a_0 = 0, \tag{69}$$

$$a_k = r_k\omega = r_{10}\omega = 0{,}0048 \cdot 100 = 0{,}48, \tag{70}$$

$$c_0 = 0, \tag{71}$$

$$c_k = 0, \tag{72}$$

$$r_1 = r_0 + \Delta = 0{,}004 + 0{,}00008 = 0{,}00408, \tag{73}$$

$$r_2 = r_0 + 2\Delta = 0{,}004 + 2 \cdot 0{,}00008 = 0{,}00416, \tag{74}$$

...

$$\begin{aligned} r_{k-1} &= r_0 + (k-1) \cdot \Delta = \\ &= 0{,}004 + (10-1) \cdot 0{,}00008 = 0{,}00472, \end{aligned} \tag{75}$$

$$r_k = r_0 + k\Delta = 0{,}004 + 10 \cdot 0{,}00008 = 0{,}0048. \tag{76}$$

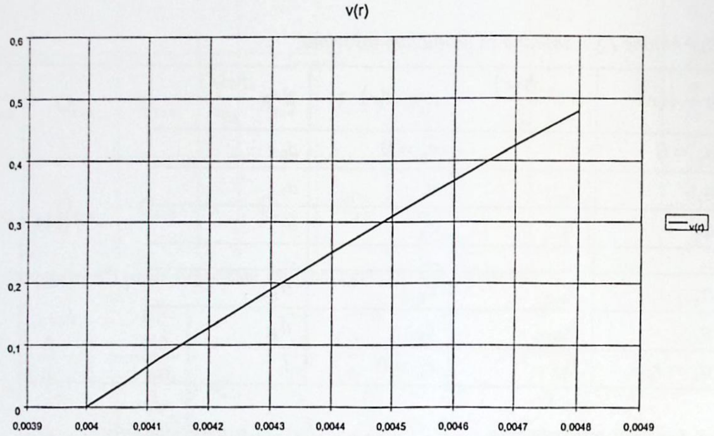
Treba reći da pošto je odabrano da broj koraka numeričke integracije bude (n = 10), dimenzije kvadratne matrice (A) iznose (40x40) dok dimenzije matrica kolona ($\underline{x}$) i ($\underline{y}$) iznose (40x1). Shodno iznesenoj numeričkoj proceduri koja je izvedena u programskom paketu EXCEL 97, rezultati proračuna su sređeni u skladu sa tabelom 2 i prikazani u tabeli 3.

Tabela 3 - Vrednosti brzine i mikrorotacije suspenzije u zavisnosti od potega (r)

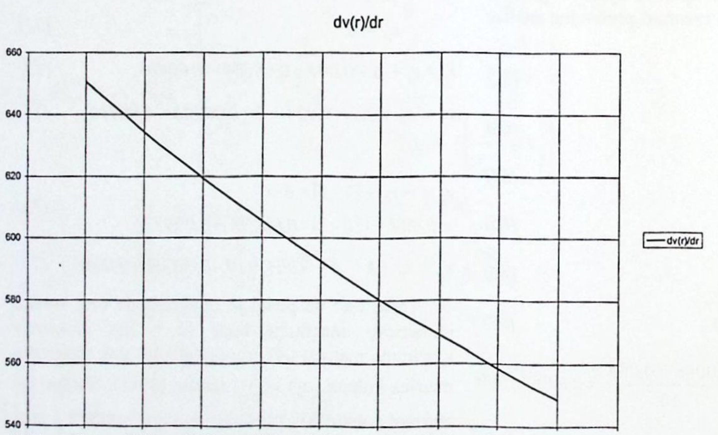
r	v(r)	dv(r)/dr	w(r)	dw(r)/dr
r_0=0,00400	0	650,5173162	0	2,426292071
r_1=0,00408	0,052041385	637,5071463	0,000194103	1,857352376
r_2=0,00416	0,103041957	625,2572440	0,000342692	1,300724103
r_3=0,00424	0,153062537	613,7095013	0,000446746	0,755689170
r_4=0,00432	0,202159297	602,8112572	0,000507205	0,221584274
r_5=0,00440	0,250384197	592,5146970	0,000524931	-0,302204240
r_6=0,00448	0,297785373	582,7763260	0,000500755	-0,816244935
r_7=0,00456	0,344407479	573,5565099	0,000435455	-1,321065351
r_8=0,00464	0,390292000	564,8190707	0,000329770	-1,817155642
r_9=0,00472	0,435477525	556,5309314	0,000184398	-2,304971825
r_{10}=0,00480	0,480000000	548,6618020	0	-2,784938707

(77)

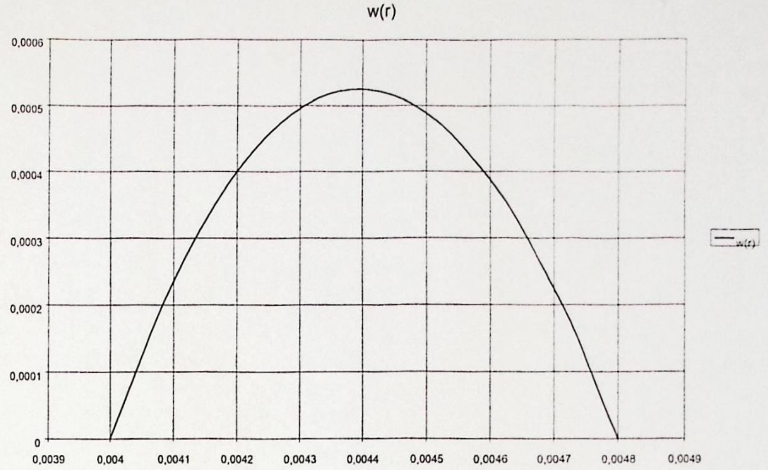
Grafici veličina $v(r)$, $dv(r)/dr$, $w(r)$ i $dw(r)/dr$, prikazani su na slikama 4, 5, 6 i 7.



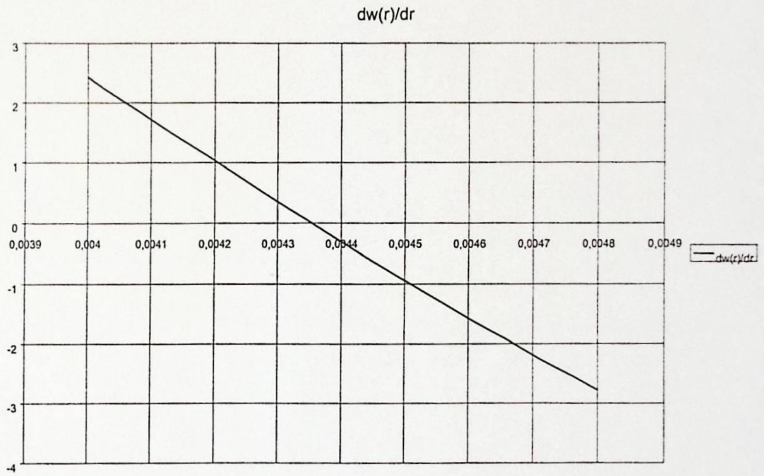
Slika 4 -Grafik veličine v(r) u zavisnosti od potega (r)



Slika 5 - Grafik veličine dv(r)/dr u zavisnosti od potega (r)



Slika 6 - Grafik veličine w(r) u zavisnosti od potega (r)



Slika 7 - Grafik veličine dw(r)/dr u zavisnosti od potega (r)

3. ZAKLJUČAK

Rezultati numeričkog postupka rešavanja sistema diferencijalnih jednačina (1) i (2), prikazani kroz grafike veličina (v), (dv/dr), (w) i (dw/dr), pokazuju izuzetnu tačnost i slaganje sa očekivanim ponašanjem.

Kao potvrda ispravnosti celokupnog postupka, treba naglasiti slaganje "ponašanja" veličina $v(r)$ i $dv(r)/dr$, odnosno $w(r)$ i $dw(r)/dr$. Pošto na intervalu ($r_o \div r_k$) veličina $v(r)$ monotono raste, njen prvi izvod mora biti veći od nule, što je sa grafika $dv(r)/dr$ evidentno. Osim toga, na delovima intervala ($r_o \div r_k$), gde veličina $w(r)$ raste, njen prvi izvod $dw(r)/dr$ je veći od nule, gde veličina $w(r)$ opada, njen prvi izvod $dw(r)/dr$ je manji od nule, što je očekivano ponašanje. Shodno tome, tačka maksimuma veličine $w(r)$, odgovara nuli veličine $dw(r)/dr$.

Pored toga, ovde prezentovani rezultati u potpunom su skladu sa rezultatima prikazanim u radu

[2]. Razlike u vrednostima veličina $v(r)$ i $w(r)$ između analitičkog i numeričkog rešenja su zanemarljivo male, tj razlike u slučaju brzine $v(r)$ su (10^{-3}), odnosno u slučaju brzine $w(r)$ su (10^{-6}).

Oznake:

$v(r)$ - Brzina kretanja suspenzije, (m/s)

$w(r)$ - Brzina mikrorotacije suspenzije, (m/s)

r - Poteg, (m)

α_1 - Konstanta,

α_2 - Konstanta,

ω - Ugaona brzina, (1/s)

Δ - Korak numeričke integracije, (m)

n - Broj koraka numeričke integracije

A - Kvadratna matrica

$\underline{x}$ - Matrica kolona

$\underline{y}$ - Matrica kolona

Donji indeksi:

o - početni

k - krajnji

LITERATURA

[1] P. Cvetković, D. Kuzmanović, Z. Golubović - On the motions of suspension with nonsymmetric stress tensor, Theoretical and Applied Mechanics, 17, 1991, pp.27-38.

[2] B. Jovanović, D.Salemović, A. Dedić - Analitički aspekt rešenja diferencijalnih jednačina strujanja suspenzije između dva saosna cilindra, Tehnika, 63/5, 2008, str.1-7.

[3] M. Bertolino - Diferencijalne jednačine, Naučna knjiga, Beograd, 1980.

[4] M. Bertolino - Numerička analiza, Naučna knjiga, Beograd, 1981.

SUMMARY

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FLUID FLOW SYSPENSION BETWEEN TWO COAXIALE CYLINDERS

In this paper numerical solution of linear differential equations with variable coefficients which treats fluid flow suspension between two coaxiale cylinders was presented. The internal cylinder was still and the external one rotated with constant velocity which was very often case in practice, due to better mixing the components. The solution was found in the form of finite differences and for the representative number of nodes the interpolation curves were introduced.

***Key words:** suspension flow, numerical solution, identification*