

id = 512744609

YU ISSN 0040-2176

UDC: 62(062.2) (497.1)

TEHNIKA®

GODINA LXIII 2008.

ČASOPIS SAVEZA INŽENJERA I TEHNIČARA SRBIJE

5

Analički aspekt rešenja diferencijalnih jednačina strujanja suspenzije između dva saosna cilindra

Dr BOŠKO JOVANOVIĆ, Matematički fakultet - Beograd,
dr DUŠKO SALEMOVIĆ, Viša tehnička Škola,
Zrenjanin, dr ALEKSANDAR DEDIĆ, Šumarski
fakultet - Beograd

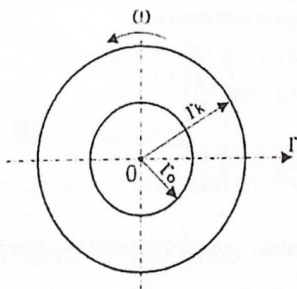
Originalni naučni rad
UDC:532.511:517.923:621.825-523.6=861

U radu će biti prezentovan analitički aspekt rešenja sistema običnih linearnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima, koje opisuju strujanje suspenzije između dva saosna cilindra, od kojih unutrašnji miruje, a spoljašnji rotira konstantnom ugaonom brzinom. Ovo je čest slučaj u praksi gde se na ovaj način postiže bolje mešanje i stvaranje homogene suspenzije (smeše). Rešenje ovih jednačina pronađeno je u formi specijalnih Beselovih funkcija nultog i prvog reda. Rezultati analitičkog postupka su prikazani grafički za neke konkretne karakteristične vrednosti, i pokazano je dobro slaganje rezultata dobijenih analitičkim postupkom sa očekivanim.

Ključne reči: analitičko rešenje, suspenzija, Beselove funkcije

1. POSTAVKA MATEMATIČKOG MODELA STRUJANJA SUSPENZIJE IZMEĐU DVA SAOSNA CILINDRA

Na slici 1. prikazana su dva saosna cilindra, od kojih unutrašnji miruje, a spoljašnji rotira konstantnom ugaonom brzinom (ω), dok se između njih kreće suspenzija određenih fizičkih svojstava. Poluprečnici ovih cilindara su respektivno, unutrašnjeg (r_0), a spoljašnjeg (r_k).



Slika 1 - Uprošćena funkcionalna šema kretanja suspenzije između dva saosna cilindra

Matematički model strujanja suspenzije, opisuju polje brzine kretanja suspenzije (v) i polje brzine mikrotrotacije suspenzije (w), u zavisnosti od potega (r)

Adresa autora: dr Aleksandar Dedić, Šumarski fakultet, Beograd, Kneza Višeslava 1

Rad primljen:

i definisan je sistemom od dve obične linearne diferencijalne jednačine drugog reda sa promenljivim koeficijentima, koje poseduju sledeću formu [1]:

$$\begin{cases} r^2 \frac{d^2 v}{dr^2} + r \frac{dv}{dr} - v - \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} r^2 \frac{dw}{dr} = 0, & (1) \\ \alpha_2 r \frac{dv}{dr} + \alpha_2 v + r \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} - 2\alpha_2 r w = 0 & (2) \end{cases}$$

gde je $\alpha_1 = \text{const} > 0$ i $\alpha_2 = \text{const} > 0$.

Granični uslovi za prethodni sistem jednačina glase:

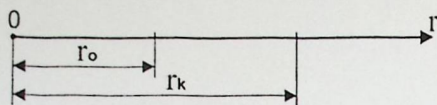
$$v(r)|_{r=r_0} = v(r_0) = v_0 = 0, \quad (3)$$

$$v(r)|_{r=r_k} = v(r_k) = v_k = r_k \omega, \quad (4)$$

$$w(r)|_{r=r_0} = w(r_0) = w_0 = 0, \quad (5)$$

$$w(r)|_{r=r_k} = w(r_k) = w_k = 0. \quad (6)$$

Granična kontura na kojoj sistem jednačina (1) i (2) uz granične uslove (3), (4), (5) i (6) važi predstavlja duž na potegu (r), u rasponu od unutrašnjeg (r_0), do spoljašnjeg (r_k), poluprečnika nepokretnog i pokretnog cilindra, što je prikazano na slici 2.



Slika 2 - Granična kontura za sistem jednačina (1) i (2) uz granične uslove (3), (4), (5) i (6)

2. POSTUPAK ANALITIČKOG REŠAVANJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA KOJE OPISUJU STRUJANJE SUSPENZIJE IZMEĐU DVA SAOSNA CILINDRA

Iz jednačine (1) sledi:

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{dw}{dr} = \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} \quad (7)$$

odnosno,

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{dw}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right) \quad (8)$$

Neposrednom integracijom gornje jednačine, dobija se:

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot w = \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} + C_1, \quad (9)$$

gde je (C_1) konstanta, koja će biti određena kasnije.

Iz jednačine (2), sledi:

$$\alpha_2 r \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right) + r \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} - 2\alpha_2 r w = 0. \quad (10)$$

Zamenom jednačine (9) u jednačinu (10), slediće dalje:

$$\alpha_2 r \left(\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} w - C_1 \right) + r \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} - 2\alpha_2 r w = 0 \quad (11)$$

odnosno,

$$r \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} + \alpha_2 \left(\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} - 2 \right) r w = \alpha_2 C_1 r \quad (12)$$

tako da konačno sledi:

$$r \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} - \alpha_2 \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1} r w = \alpha_2 C_1 r. \quad (13)$$

Ukoliko se uvede nova konstanta (β), definisana sledećim izrazom:

$$\beta = -\alpha_2 \frac{2+\alpha_1}{1+\alpha_1}. \quad (14)$$

jednačina (13), poprimiće sledeći oblik:

$$r \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} + \beta r w = \alpha_2 C_1 r. \quad (15)$$

Opšte rešenje homogenog dela gornje jednačine

$$r \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} + \beta r w = 0 \quad (16)$$

može se predstaviti cilindričnom funkcijom nultog reda [2]:

$$\begin{aligned} w_h(r) &= Z_0(\sqrt{\beta}r) = \\ &= C_3 J_0(\sqrt{\beta}r) + C_4 Y_0(\sqrt{\beta}r) \end{aligned} \quad (17)$$

U gornjem izrazu sa (J_0), označena je Beselova funkcija nultog reda, koja je definisana kao:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}, \quad (18)$$

dok je sa (Y_0), označena pridružena Beselova funkcija nultog reda, koja je definisana sa:

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln \left(\frac{e^\gamma x}{2} \right) - \\ &- \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}. \end{aligned} \quad (19)$$

Sa (γ), označena je Ojlerova konstanta, koja glasi:

$$\gamma = 0,577215665 \quad (20)$$

dok su sa (C_3) i (C_4), označene proizvoljne konstante.

Lako je proveriti da jednačina (15) ima partikularno rešenje u obliku konstante:

$$w_p(r) = -C_1 \frac{1+\alpha_1}{2+\alpha_1}. \quad (21)$$

Ukupno rešenje jednačine (15) predstavlja zbir odakle sleduje:
homogenog i partikularnog rešenja, odnosno:

$$w(r) = w_h(r) + w_p(r) \quad (22) \quad C_3 = C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} \cdot \frac{Y_0(\sqrt{\beta r_0}) - Y_0(\sqrt{\beta r_k})}{D} \quad (26)$$

tako da sledi:

$$w(r) = C_3 J_0(\sqrt{\beta r}) + C_4 Y_0(\sqrt{\beta r}) - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} \quad (23) \quad C_4 = C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} \cdot \frac{J_0(\sqrt{\beta r_0}) - J_0(\sqrt{\beta r_k})}{D} \quad (27)$$

gde je:

Konstante (C_3) i (C_4), određuju se iz graničnih uslova (5) i (6), odnosno:

$$D = J_0(\sqrt{\beta r_0}) Y_0(\sqrt{\beta r_k}) - \quad (28)$$

$$- J_0(\sqrt{\beta r_k}) Y_0(\sqrt{\beta r_0})$$

$$\begin{cases} w(r_0) = C_3 J_0(\sqrt{\beta r_0}) + \\ + C_4 Y_0(\sqrt{\beta r_0}) - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Zamenom izraza (23) u jednačinu (9), slediće:

$$\begin{cases} w(r_k) = C_3 J_0(\sqrt{\beta r_k}) + \\ + C_4 Y_0(\sqrt{\beta r_k}) - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

$$\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \cdot$$

$$\cdot [C_3 J_0(\sqrt{\beta r}) + C_4 Y_0(\sqrt{\beta r})] - 2C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} \quad (29)$$

Opšte rešenje gornje jednačine, glasi [2]:

$$v(r) = e^{-\int \frac{1}{r} dr} \left\{ C_2 + \int \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} [C_3 J_0(\sqrt{\beta r}) + C_4 Y_0(\sqrt{\beta r})] \cdot e^{\int \frac{1}{r} dr} dr - \int 2C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} \cdot e^{\int \frac{1}{r} dr} dr \right\} \quad (30)$$

odnosno,

$$v(r) = \frac{1}{r} \left\{ C_2 + \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} [C_3 \int r J_0(\sqrt{\beta r}) dr + C_4 \int r Y_0(\sqrt{\beta r}) dr] - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} r^2 \right\} \quad (31)$$

Koristeći relacije iz literature [3]:

gde je sa (J_1), označena Beselova funkcija prvog reda

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x) + const, \quad (32)$$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{(2k+1)} \quad (34)$$

$$\int x Y_0(x) dx = x Y_1(x) + const, \quad (33)$$

a sa (Y_1), označena pridružena Beselova funkcija prvog reda

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} J_1(x) \ln\left(\frac{e^{\gamma} x}{2}\right) - \frac{2}{\pi x} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \frac{1}{2k+2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{(2k+1)}, \quad (35)$$

izraz (31), može se dalje transformisati na sledeći način:

$$v(r) = \frac{C_2}{r} + \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{r} [C_3 \sqrt{\beta r} J_1(\sqrt{\beta r}) + C_4 \sqrt{\beta r} Y_1(\sqrt{\beta r})] - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} r. \quad (36)$$

Treba napomenuti da su u konstanti (C_2), već uračunate konstantne integracije, definisane izrazima (32) i (33).

Imajući u vidu relaciju (14), izraz (36) poprima sledeći oblik:

$$v(r) = \frac{C_2}{r} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\sqrt{\beta}}{2 + \alpha_1} \cdot [C_3 J_1(\sqrt{\beta}r) + C_4 Y_1(\sqrt{\beta}r)] - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} r. \quad (37)$$

Konačno, imajući u vidu izraze ((26) i (27), prethodni izraz poprima konačni oblik:

$$v(r) = \frac{C_2}{r} - C_1 \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1)}{\alpha_2(2 + \alpha_1)^2} \cdot \frac{Y_0(\sqrt{\beta}r_k) - Y_0(\sqrt{\beta}r_0)}{D} \sqrt{\beta} J_1(\sqrt{\beta}r) - \\ - C_1 \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1)}{\alpha_2(2 + \alpha_1)^2} \cdot \frac{J_0(\sqrt{\beta}r_0) - J_0(\sqrt{\beta}r_k)}{D} \sqrt{\beta} Y_1(\sqrt{\beta}r) - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} r. \quad (38)$$

Konstante (C_1) i (C_2), određuju se iz graničnih uslova (3) i (4), odnosno:

$$v(r_0) = \frac{C_2}{r_0} - C_1 \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1)}{\alpha_2(2 + \alpha_1)^2} \cdot \frac{Y_0(\sqrt{\beta}r_k) - Y_0(\sqrt{\beta}r_0)}{D} \sqrt{\beta} J_1(\sqrt{\beta}r_0) - \\ - C_1 \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1)}{\alpha_2(2 + \alpha_1)^2} \cdot \frac{J_0(\sqrt{\beta}r_0) - J_0(\sqrt{\beta}r_k)}{D} \sqrt{\beta} Y_1(\sqrt{\beta}r_0) - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} r_0 = 0 \quad (39)$$

$$v(r_k) = \frac{C_2}{r_k} - C_1 \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1)}{\alpha_2(2 + \alpha_1)^2} \cdot \frac{Y_0(\sqrt{\beta}r_k) - Y_0(\sqrt{\beta}r_0)}{D} \sqrt{\beta} J_1(\sqrt{\beta}r_k) - \\ - C_1 \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1)}{\alpha_2(2 + \alpha_1)^2} \cdot \frac{J_0(\sqrt{\beta}r_0) - J_0(\sqrt{\beta}r_k)}{D} \sqrt{\beta} Y_1(\sqrt{\beta}r_k) - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} r_k = r_k \omega \quad (40)$$

odakle sleduje,

$$C_1 = \frac{r_k^2 \omega \alpha_2 (2 + \alpha_1)^2 D}{\alpha_1 (1 + \alpha_1)} \cdot \left\{ \frac{\alpha_2 (2 + \alpha_1) D}{\alpha_1} (r_0^2 - r_k^2) + \right. \\ \left. + [Y_0(\sqrt{\beta}r_0) - Y_0(\sqrt{\beta}r_k)] \cdot [\sqrt{\beta}r_k J_1(\sqrt{\beta}r_k) - \sqrt{\beta}r_0 J_1(\sqrt{\beta}r_0)] + \right. \\ \left. + [J_0(\sqrt{\beta}r_k) - J_0(\sqrt{\beta}r_0)] \cdot [\sqrt{\beta}r_k Y_1(\sqrt{\beta}r_k) - \sqrt{\beta}r_0 Y_1(\sqrt{\beta}r_0)] \right\}^{-1} \quad (41)$$

$$C_2 = C_1 \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1)}{\alpha_2(2 + \alpha_1)^2} \cdot \frac{1}{D} \left\{ \frac{\alpha_2(2 + \alpha_1)D}{\alpha_1} r_0^2 - \right. \\ \left. - [Y_0(\sqrt{\beta}r_0) - Y_0(\sqrt{\beta}r_k)] \cdot \sqrt{\beta}r_0 J_1(\sqrt{\beta}r_0) - [J_0(\sqrt{\beta}r_k) - J_0(\sqrt{\beta}r_0)] \cdot \sqrt{\beta}r_0 Y_1(\sqrt{\beta}r_0) \right\} \quad (42)$$

Radi preglednosti, na jednom mestu će biti izloženi rezultati postavljenog problema.

Rešenje sistema diferencijalnih jednačina (1) i (2), uz granične uslove (3), (4), (5) i (6) i graničnu konturu sa slike 2, definisano je izrazima (38), (23), (14), (28), (41), (42), (26), i (27). Ovo rešenje glasi:

$$v(r) = \frac{C_2}{r} - C_1 \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1)}{\alpha_2(2 + \alpha_1)^2} \cdot \frac{Y_0(\sqrt{\beta}r_k) - Y_0(\sqrt{\beta}r_0)}{D} \sqrt{\beta} J_1(\sqrt{\beta}r) - \\ - C_1 \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1)}{\alpha_2(2 + \alpha_1)^2} \cdot \frac{J_0(\sqrt{\beta}r_0) - J_0(\sqrt{\beta}r_k)}{D} \sqrt{\beta} Y_1(\sqrt{\beta}r) - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} r, \quad (43)$$

$$w(r) = C_3 J_0(\sqrt{\beta}r) + C_4 J_0(\sqrt{\beta}r_k) - C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} \quad (44)$$

$$\beta = -\alpha_2 \frac{2 + \alpha_1}{1 + \alpha_1} \quad (45)$$

$$D = J_0(\sqrt{\beta}r_0)Y_0(\sqrt{\beta}r_k) - J_0(\sqrt{\beta}r_k)Y_0(\sqrt{\beta}r_0) \quad (46)$$

$$C_1 = \frac{r_k^2 \omega \alpha_2 (2 + \alpha_1)^2 D}{\alpha_1 (1 + \alpha_1)} \left\{ \frac{\alpha_2 (2 + \alpha_1) D}{\alpha_1} (r_0^2 - r_k^2) + \right. \\ \left. + [Y_0(\sqrt{\beta}r_0) - Y_0(\sqrt{\beta}r_k)] \cdot [\sqrt{\beta}r_k J_1(\sqrt{\beta}r_k) - \sqrt{\beta}r_0 J_1(\sqrt{\beta}r_0)] + \right. \\ \left. + [J_0(\sqrt{\beta}r_k) - J_0(\sqrt{\beta}r_0)] \cdot [\sqrt{\beta}r_k Y_1(\sqrt{\beta}r_k) - \sqrt{\beta}r_0 Y_1(\sqrt{\beta}r_0)] \right\}^{-1} \quad (47)$$

$$C_2 = C_1 \frac{\alpha_1 (1 + \alpha_1)}{\alpha_2 (2 + \alpha_1)^2} \cdot \frac{1}{D} \left\{ \frac{\alpha_2 (2 + \alpha_1) D}{\alpha_1} r_0^2 - \right. \\ \left. - [Y_0(\sqrt{\beta}r_0) - Y_0(\sqrt{\beta}r_k)] \cdot \sqrt{\beta}r_0 J_1(\sqrt{\beta}r_0) - [J_0(\sqrt{\beta}r_k) - J_0(\sqrt{\beta}r_0)] \cdot \sqrt{\beta}r_0 Y_1(\sqrt{\beta}r_0) \right\} \quad (48)$$

$$C_3 = C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} \cdot \frac{Y_0(\sqrt{\beta}r_k) - Y_0(\sqrt{\beta}r_0)}{D} \quad (49)$$

$$C_4 = C_1 \frac{1 + \alpha_1}{2 + \alpha_1} \cdot \frac{J_0(\sqrt{\beta}r_0) - J_0(\sqrt{\beta}r_k)}{D} \quad (50)$$

Da bi se na konkretnom primeru ilustrovali grafici funkcija (v) i (w), usvojice se da je:

$$\alpha_1 = 10 \quad (51)$$

$$\alpha_2 = 10 \quad (52)$$

$$r_0 = 0,004 \quad (53)$$

$$r_k = 0,0048 \quad (54)$$

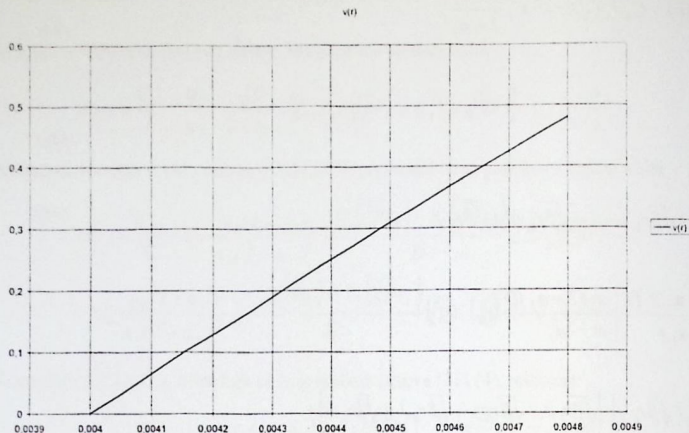
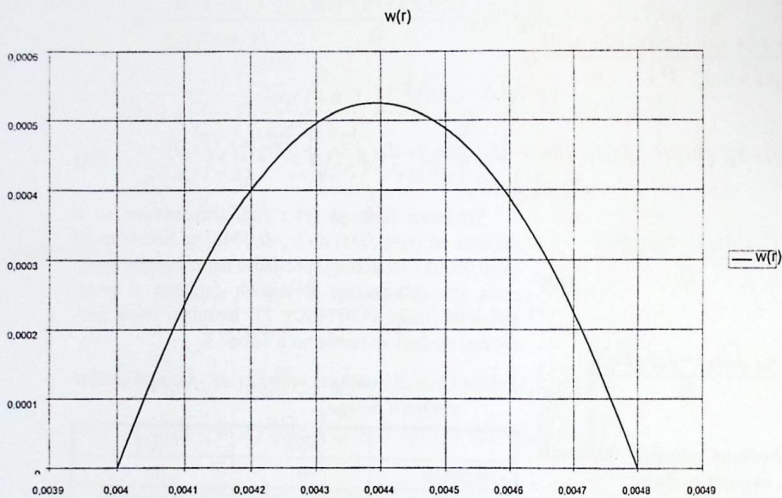
$$\omega = 100 \quad (55)$$

Vrednosti funkcija (v) i (w), sračunavane su u rasponu od ($r_0=0,004$) do ($r_k=0,0048$) sa korakom od ($\Delta=0,00008$), uz pomoć specijalno napravljenog programa za sračunavanje Beselovih funkcija u programskom jeziku FORTRAN 77. Rezultati ovog proračuna, sređeni su tabelarno u Tabeli 1.

Tabela 1 - Vrednosti rešenja za karakteristične vrednosti potega

r	v(r)	w(r)
$r_0=0,00400$	0	0
$r_1=0,00408$	0,051850249	0,000193484
$r_2=0,00416$	0,102713263	0,000341726
$r_3=0,00424$	0,152644920	0,000445651
$r_4=0,00432$	0,201696960	0,000506133
$r_5=0,00440$	0,249917358	0,000523997
$r_6=0,00448$	0,297350664	0,000500025
$r_7=0,00456$	0,344038300	0,000434956
$r_8=0,00464$	0,390018834	0,000329491
$r_9=0,00472$	0,435328215	0,000184295
$r_{10}=0,00480$	0,480000000	0

Grafici veličina (v) i (w), prikazani su na slikama 3 i 4.

Slika 3 - Grafik veličine $v(r)$ u zavisnosti od potega (r)Slika 4 - Grafik veličine $w(r)$ u zavisnosti od potega (r)

3. ZAKLJUČAK

Rezultati analitičkog postupka rešavanja sistema diferencijalnih jednačina (1 i 2), prikazani kroz grafičke veličine (v) i (w), pokazuju izuzetnu tačnost i slaganje sa očekivanim ponašanjem suspenzije. Korišćenjem rezultata (43) i (44) možemo u svakoj tački suspenzije koju definiše poteg (r) da odredimo brzinu njenog kretanja (v), kao i brzinu mikrorotacije (w) suspenzije. Ovo je od posebnog značaja za praksu jer se poznavanjem baš ovih brzina može uticati na bolje mešanje i stvaranje homogene suspenzije.

Oznake:

- $v(r)$ - Brzina kretanja suspenzije, (m/s)
 - $w(r)$ - Brzina mikrorotacije suspenzije, (m/s)
 - r - Poteg, (m)
 - α_1 - Konstanta,
 - α_2 - Konstanta,
 - β - Konstanta,
 - ω - Ugaona brzina, (1/s)
- Donji indeksi:
- o - početni
 - k - krajnji

4. LITERATURA

- [1] Z. Golubović, P. Cvetković, D. Kuzmanović – On the Motions of Suspension with Nonsymmetric Stress Tensor, *Theoretical and Applied Mechanics*, 17(1991)
- [2] E. Kamke – *Differential gleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1959.
- [3] E. Janke, F. Emde, F. Lösch – *Tafeln Höherer Funktionen*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1960.

SUMMARY

ANALYTIC SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FLUID FLOW
SUSPENSION BETWEEN TWO COAXIAL CYLINDERS

In this paper analytic solution of linear differential equations with variable coefficients which treats fluid flow suspension between two coaxial cylinders was presented. The internal cylinder was still and the external one rotated with constant velocity which was very often case in practice, due to better mixing the components. The solution was found in the form of special Bessel's functions of zero and first row. The results were shown on diagrams for some characteristic values, and the good agreement was achieved between calculated and expected results.

Key words: *analytical solution, suspension, Bessel's functions*